ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE CENTRALE DE LYON — ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'Admission 1987
****

MATHEMATIQUES I
(4 pages dactylographiées)

P'

Définitions et notations :

Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de classe C^∞, admettant la période 2π. Pour tout $f \in E$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, on posera :

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ipt}\, dt.$$

On désignera par $||f||$ la borne supérieure de $|f(t)|$ quand t décrit $\mathbb{R}$.

Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on désignera par E_k l'ensemble des éléments f de E ayant la propriété suivante : il existe $M > 0$ et $A > 0$ (pouvant l'un et l'autre dépendre de f) tels que (avec la convention usuelle $f^{(o)} = f$) l'on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$||f^{(n)}|| \leqslant M(n!)^k A^n$$

But du problème

On se propose d'étudier quelques propriétés de E_k et notamment de caractériser par leurs coefficients de Fourier les éléments de E_k.

Première partie : généralités, étude de E_o.

I.1.a) Montrer que, pour tout $f \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est bornée.

b) Soit $f \in E$; Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, $\widehat{f^{(n)}}(p)$, coefficient de Fourier d'indice p de $f^{(n)}$, en fonction de $\hat{f}(p)$, de n et de p. Etablir, pour $p \neq 0$, l'inégalité :

$$|\hat{f}(p)| \leqslant \frac{||f^{(n)}||}{|p|^n}$$

I.2. Montrer que, pour tout $f \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{|p| \to +\infty} |p^n|\, \hat{f}(p) = 0$$

I.3. Soit une application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$, $p \longmapsto c_p$, telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{|p| \to +\infty} |p|^k c_p = 0$$

Montrer que les séries de fonctions $\sum_{p=0}^{+\infty} c_p e^{ipt}$ et $\sum_{p=1}^{+\infty} c_{-p} e^{-ipt}$, où t décrit $\mathbb{R}$, sont normalement convergentes dans $\mathbb{R}$. Si l'on pose :

$$f(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p e^{ipt} + \sum_{p=1}^{+\infty} c_{-p} e^{-ipt},$$

montrer que f appartient à E et que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}(p) = c_p$

I.4. Etablir que, si f et g sont deux éléments de E_k et μ une constante complexe, alors μf, $f + g$, fg et f' sont éléments de E_k.

I.5.a) Soit $f \in E_o$. Déduire de I.1.b que $\hat{f}(p)$ est nul sauf pour un nombre fini de valeurs de p.

b) Soit q un entier strictement positif; on définit f par

$$f(t) = \sum_{p=-q}^{q} c_p e^{ipt}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, les c_p étant des constantes complexes et l'un au moins des deux nombres c_q et c_{-q} étant non nul. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$||f^{(n)}|| \leqslant M q^n$$

et que, si M' et A sont deux constantes positives satisfaisant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, à l'inégalité :

$$||f^{(n)}|| \leqslant M' A^n, \qquad \text{alors } A \geqslant q.$$

c) En déduire que les éléments de E_o sont les polynômes trigonométriques, c'est-à-dire les fonctions du type $t \longmapsto P(\cos t, \sin t)$, où P est un polynôme de deux variables à coefficients dans $\mathbb{C}$.

I.6. Soit q un entier strictement positif; on définit g_1 par :

$$g_1(t) = \cos^q t.$$

Etablir la meilleure inégalité possible du type suivant :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad ||g_1^{(n)}|| \leqslant M_1 (A_1)^n$$

(c'est-à-dire trouver le plus petit A_1 possible et, pour cet A_1, trouver le plus petit M_1 possible).

Deuxième partie

Cette partie est indépendante de la précédente et a pour but d'établir certaines inégalités nécessaires à la suite du problème.

II.1. Soit $a > 1$ et soit n un entier strictement positif; étudier, quand x décrit $[0, +\infty[$, les variations de la fonction $x \longmapsto x^n a^{-x}$. On donnera explicitement le maximum de cette fonction et la valeur de x pour laquelle il est atteint.

II.2. Etudier la monotonie de la suite $u_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \frac{1}{n!}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

En déduire l'inégalité : $n! \geqslant e \left(\frac{n}{e}\right)^n$

TOURNER LA PAGE

II.3. On pose, pour tout $x > 0$:

$$\varphi(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(n!\, x^{-n} \right)$$

a) Donner une expression explicite de $\varphi(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle $]s, s+1]$, où $s \in \mathbb{N}$.

b) Etudier la continuité de φ ; représenter graphiquement la restriction de φ à l'intervalle $]0, 4]$.

c) Etablir l'existence d'une constante β telle que, pour tout $x > 0$:

$$\varphi(x) \leqslant \beta\, e^{-\frac{x}{2}}$$

Troisième partie : étude du cas particulier des "fonctions rationnelles trigonométriques".

III.1. Soit $a \in \mathbb{C}$, tel que $|a| > 1$. On pose, pour tout t réel :

$$h_a(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} a^{-p} e^{ipt}$$

a) Donner une expression explicite de $h_a(t)$.

b) Etablir que $h_a \in E$; donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le développement en série de Fourier de $h_a^{(n)}$.

c) Etablir l'inégalité, valable pour n et p entiers, $n \geqslant 0$, $p > 0$:

$$p^n \cdot |a|^{-\frac{p}{2}} \leqslant \left(\frac{2}{\ln(|a|)} \right)^n \cdot n!$$

d) En déduire que $h_a \in E_1$.

III.2. Soit $b \in \mathbb{C}$, avec $|b| \neq 1$. Donner les coefficients de Fourier de la fonction ϕ_b définie par :

$$\phi_b(t) = \frac{1}{b - e^{it}}$$

En déduire que ϕ_b appartient à E_1.

III.3. Soit P et Q deux polynômes de 2 variables à coefficients complexes, tels que Q(cost, sint) ne soit nul pour aucun t réel. Soit f l'application de R dans C définie par :

$$f(t) = \frac{P(\cos t, \sin t)}{Q(\cos t, \sin t)}$$

a) Montrer qu'il existe deux polynômes d'une variable U et V à coefficients complexes tels que :

. V n'ait aucun zéro de module 1

. pour tout t réel, $f(t) = \dfrac{U(e^{it})}{V(e^{it})}$

b) En déduire, à l'aide de la décomposition en éléments simples de $\frac{U}{V}$, que f appartient à E_1.

III.4. Donner pour la fonction qui à tout t réel associe $\frac{\sin t}{5 - 3\cos t}$ son développement en série de Fourier réelle, c'est-à-dire du type :

$$\alpha_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} (\alpha_p \cos p\,t + \beta_p \sin p\,t).$$

Quatrième partie : caractérisation des éléments de E_k par leurs coefficients de Fourier.

IV.1. Soit k un entier strictement positif, et soit $f \in E_k$; il existe alors $M > 0$ et $A > 0$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f^{(n)}\| \leqslant M(n!)^k A^n$$

a) Etablir, pour tout entier relatif $p \neq 0$, l'inégalité :

$$|\hat{f}(p)| \leqslant M(n!)^k \left(\frac{A}{|p|} \right)^n$$

b) A l'aide de la fonction φ définie dans la question II.3. (on pourra poser $x = \left(\frac{|p|}{A} \right)^{1/k}$), montrer l'existence de deux constantes strictement positives, B et λ, telles que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$:

$$|\hat{f}(p)| \leqslant B \exp\left(-\lambda(|p|^{1/k})\right)$$

(on rappelle que la notation exp z est synonyme de e^z).

IV.2. Soit inversement une application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$, $p \longmapsto c_p$, pour laquelle existent deux constantes B et λ strictement positives telles que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$:

$$|c_p| \leqslant B \exp\left(-\lambda\, |p|^{1/k}\right)$$

a) Etablir qu'il existe un élément f de E tel que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $c_p = \hat{f}(p)$.

b) Déduire de la partie II l'inégalité, valable pour tout couple (n,p) d'entiers strictement positifs :

$$p^n \exp\left(-\frac{\lambda}{2} p^{1/k}\right) \leqslant (n!)^k \left(\frac{2k}{\lambda} \right)^{nk}$$

c) En déduire une majoration de $\|f^{(n)}\|$ et montrer que $f \in E_k$.

IV.3. a désignant un nombre complexe tel que $|a| > 1$, et m désignant un entier strictement supérieur à 1, on pose :

$$v(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} a^{-p} e^{i(p^m)t}$$

Quelles sont les valeurs de k telles que $v \in E_k$?

Que déduire de cet exemple ?

IV.4. Chercher sous la forme

$$w(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} a^{-p} \exp(i s_p t),$$

où a est une constante complexe telle que $|a| > 1$ et où $p \longmapsto s_p$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels, une fonction appartenant à E sans appartenir à aucun des E_k.

* * *